Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a XIV-a, Baia Mare, 16 noiembrie 2019
CLASA a IX-a

Subiectul 1.

Arătaţi că dacă $x, y, z > 0$ şi $xy, yz, zx \leq 1$, atunci:

$$\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{2+x^2+y^2}+\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{2+y^2+z^2}+\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{2+z^2+x^2}\geq\frac{3+xy+yz+zx}{2}.$$

Subiectul 2.

Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\sqrt{9a-6b}+2\sqrt{3b-5a+3}+3\sqrt{2a-b+1}=8.$$

Subiectul 3.

Fie $ABCD$ un patrulater şi punctele M, N, P, Q astfel încât $2\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}$, $2\overrightarrow{NC}=-\overrightarrow{NB}$, $2\overrightarrow{PD}=-\overrightarrow{PC}$ şi $2\overrightarrow{QD}=-\overrightarrow{QA}$. Arătaţi că

$$MP+QN\leq\frac{1}{3}(AB+BC+2CD+2AD).$$

Subiectul 4.

Fie ABC un triunghi şi punctele P, Q pe laturile AB, respectiv AC, astfel încât $\frac{PB}{PA}=\frac{AC}{BC}, \frac{QC}{QA}=\frac{AB}{BC}$. Ştiind că centrul cercului înscris în triunghiul ABC aparţine lui PQ, arătaţi că triunghiul ABC este dreptunghic.

Notă:

1) Timp de lucru 3 h.
2) Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a XIV-a, Baia Mare, 16 noiembrie 2019
BAREM DE CORECTARE CLASA A IX-A

Subiectul 1.

Arătaţi că dacă $x, y, z > 0$ şi $xy, yz, zx \leq 1$, atunci:

$$\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{2+x^2+y^2}+\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{2+y^2+z^2}+\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{2+z^2+x^2} \geq \frac{3+xy+yz+zx}{2}$$

Soluţie:

$\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{2+x^2+y^2} \geq \frac{1+xy}{2} \Leftrightarrow 2+2x^2+2y^2+2x^2y^2 \geq 2+x^2+y^2+2xy+xy(x^2+y^2) \Leftrightarrow$ $(x^2+y^2)(1-xy) \geq 2xy(1-xy)$, inegalitate care este adevărată deoarece $x^2+y^2 \geq 2xy$ şi $1-xy \geq 0$..**4p**

Însumând cele trei inegalităţi analoage, obţinem inegalitatea cerută...............................**3p**

Subiectul 2.

Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\sqrt{9a-6b}+2\sqrt{3b-5a+3}+3\sqrt{2a-b+1}=8.$$

Soluţie:

Notăm $x=\sqrt{9a-6b}, y=\sqrt{3b-5a+3}, z=\sqrt{2a-b+1}$..................................**2p**

Atunci $x+2y+3z=8, a=6-x^2-2y^2, b=\frac{1}{3}(27-9y^2-5x^2)$.........................**2p**

Din ultima relaţie avem $x^2+3y^2+3z^2=12$ şi înlocuind $x=8-2y-3z$ obţinem $7y^2+4y(3z-8)+12z^2-48z+52=0$. **2p**

Deoarece $y \in \mathbb{R}$ şi $\Delta=-48(2z-3)^2$ obţinem $x=\frac{3}{2}, y=1, z=\frac{3}{2}, a=\frac{7}{4}, b=\frac{9}{4}$ **1p**

Subiectul 3.

Fie $ABCD$ un patrulater şi punctele M, N, P, Q astfel încât $2\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}$, $2\overrightarrow{NC}=-\overrightarrow{NB}$, $2\overrightarrow{PD}=-\overrightarrow{PC}$ şi $2\overrightarrow{QD}=-\overrightarrow{QA}$. Arătaţi că

$$MP+QN \leq \frac{1}{3}(AB+BC+2CD+2AD).$$

Soluţie:

Deoarece P împarte segmentul orientat $\overrightarrow{CD}$ în raportul $k=-2$, rezultă că $\overrightarrow{MP}=\frac{\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}}{3}$ $=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AD})$..**2p**

Analog $\overrightarrow{QN}=\frac{\overrightarrow{QB}+2\overrightarrow{QC}}{3}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{DC})$...**2p**

Obţinem

$MP + QN = |\overrightarrow{MP}| + |\overrightarrow{QN}| \leq \frac{1}{3}(|\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DC}|) \leq \frac{1}{3}(AB + BC + 2CD + 2AD)$...**3p**

Subiectul 4.

Fie *ABC* un triunghi şi punctele *P*, *Q* pe laturile *AB*, respectiv *AC*, astfel încât $\frac{PB}{PA} = \frac{AC}{BC}, \frac{QC}{QA} = \frac{AB}{BC}$. Ştiind că centrul cercului înscris în triunghiul *ABC* aparţine lui *PQ*, arătaţi că triunghiul *ABC* este dreptunghic.

Soluţie:

Din $\frac{PB}{PA} = \frac{b}{a} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{AB}$şi analog $\overrightarrow{AQ} = \frac{a}{a+c}\overrightarrow{AC}$..**2p**

Pe de altă parte $\overrightarrow{AI} = \frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}$, ...**1p**

deci $\overrightarrow{IP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AI} = \frac{a^2+ac-b^2}{(a+b)(a+b+c)}\overrightarrow{AB} - \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

Cum $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = -\frac{a}{a+b}\overrightarrow{AB} + \frac{a}{a+c}\overrightarrow{AC}$,...**3p**

iar $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{IP}$ sunt vectori coliniari, rezultă că $\frac{\frac{a^2+ac-b^2}{(a+b)(a+b+c)}}{-\frac{a}{a+b}} = \frac{-\frac{c}{a+b+c}}{\frac{a}{a+c}}$ de unde $a^2 = b^2 + c^2$, ceea ce trebuia demonstrat...**1p**

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro